Trabalho de matemática.

Noção de poliedros e polígonos, relação de Euler e estudo do prisma.

2°B

Giovanne, 11. Helen, 13. Luciana,21 . Mariana, 23.

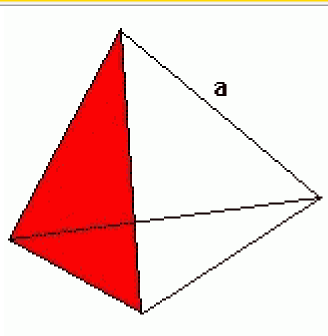
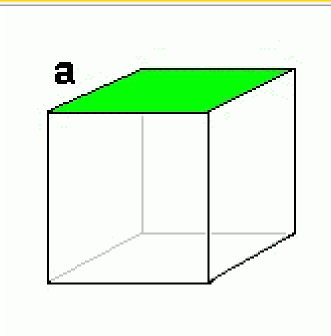
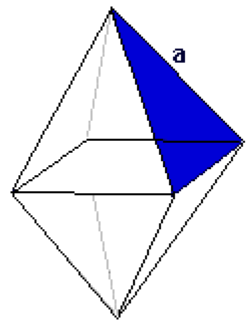
Poliedro

Poliedro é um sólido limitado externamente por planos no espaço R^3. As regiões planas que limitam este sólido são as faces do poliedro. As interseções das faces são as arestas do poliedro. As interseções das arestas são os vértices do poliedro. Cada face é uma região poligonal contendo *n* lados.

Poliedros convexos são aqueles cujos ângulos diedrais formados por planos adjacentes têm medidas menores do que 180 graus. Outra definição: Dados quaisquer dois pontos de um poliedro convexo, o segmento que tem esses pontos como extremidades, deverá estar inteiramente contido no poliedro.

Poliedros Regulares

Um poliedro é regular se todas as suas faces são regiões poligonais regulares com *n* lados, o que significa que o mesmo número de arestas se encontram em cada vértice.

Tetraedro	Hexaedro (cubo)	Octaedro
		

Características dos poliedros convexos

Notações para poliedros convexos: V: Número de vértices, F: Número de faces, A: Número de arestas, n: Número de lados da região poligonal regular (de cada face), a: Medida da aresta A e m: Número de ângulos entre as arestas do poliedro convexo.

Característica do poliedro convexo	Medida da característica
Relação de Euler	$V + F = A + 2$
Número *m* de ângulos diedrais	$m = 2A$
Ângulo diedral	$d = 2\arcsin[\cos(\frac{\pi V}{m})\csc(\frac{\pi}{n})]$

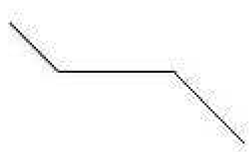
Raio do círculo inscrito	$r = \frac{a}{2}\cot(\frac{\pi}{n})\tan(\frac{d}{2})$
Raio do círculo circunscrito	$R = \frac{a}{2}\tan(\frac{\pi V}{m})\tan(\frac{d}{2})$
Área da superfície externa	$\text{Área} = \frac{mF}{4V}a^2\tan(\frac{d}{2})$
Volume do sólido poliédrico	$\text{Vol} = \frac{mF}{24V}a^3\cot^2(\frac{\pi V}{m})\tan(\frac{d}{2})$

Polígonos

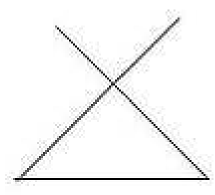
Um polígono é uma figura geométrica plana limitada por uma linha poligonal fechada : e.x. o hexágono é um polígono de seis lados. A palavra "polígono" advém do grego e quer dizer muitos (poly) e ângulos (gon).

Linhas poligonais e polígonos

Linha poligonal é uma sucessão de segmentos consecutivos e não-colineares, dois a dois. Classificam-se em:



Linha poligonal aberta simples

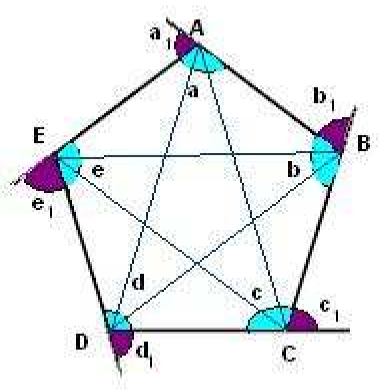


Linha poligonal aberta não-simples

Polígono é uma superfície plana limitada por linhas rectas (lados). Um polígono divide o plano em que se encontra em duas regiões (a interior e a exterior), sem pontos comuns. Um polígono estrelado é uma linha poligonal fechada não-simples com propriedades especiais.

Elementos de um polígono

Um polígono possui os seguintes elementos:



— Lados: Cada um dos segmentos de reta que une vértices consecutivos:

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$.

— Vértices: Ponto de encontro de dois lados consecutivos:

A, *B*, *C*, *D*, *E*.

— Diagonais: Segmentos que unem dois vértices não consecutivos:

$\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CE}$.

— Ângulos internos: Ângulos formados por dois lados consecutivos:

$\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{e}$

— Ângulos externos: Ângulos formados por um lado e pelo prolongamento do lado a ele consecutivo:

$\hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{c}_1, \hat{d}_1, \hat{e}_1.$

Classificação dos polígonos quanto ao número de lados

Número de lados	Polígono
1	não existe
2	não existe
3	triângulo
4	quadrilátero
5	pentágono

6	hexágono
7	heptágono
8	octógono
9	eneágono
10	decágono
11	undecágono
100	hectágono
1000	quilógono
1.000.000	megágono
10^9	gigágono
10^{100}	googólgono

Classificação dos polígonos

A classificação dos polígonos pode ser ilustrada pela seguinte árvore:

```
              Polígono
              /    \
           Simples    Complexo
           /   \
       Convexo    Côncavo
        /
   Inscritível
    /
Regular
```

- Um polígono é denominado simples se ele for descrito por uma fronteira simples e que não se cruza (daí divide o plano em uma região interna e externa), caso o contrário é denominado complexo.
- Um polígono simples é denominado convexo se não tiver nenhum ângulo interno cuja medida é maior que 180°, caso o contrário é denominado côncavo.
- Um polígono convexo é denominado circunscrito a uma circunferência ou simplesmente chamado de polígono circunscrito, se todos os seus lados tangenciarem a uma mesma circunferência.
- Um polígono convexo é denominado inscrito a uma circunferência ou simplesmente chamado de polígono inscrito, se todos os vértices pertencerem a uma mesma circunferência.

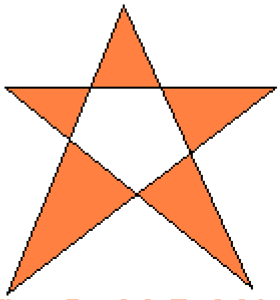
- Um polígono inscritível é denominado regular se todos os seus lados e todos os seus ângulos forem congruentes.

Alguns polígonos regulares:

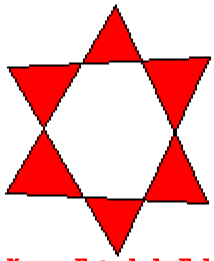
- triângulo equilátero
- quadrado
- pentágono regular
- hexágono regular

Propriedades dos polígonos convexos

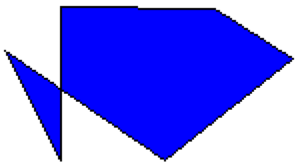
- O número de vértices é igual ao número de lados.
- De cada vértice de um polígono de *n* lados, saem *n* − 3 diagonais (d_v).
- O número de diagonais (*d*) de um polígono é dado por $d = \frac{n(n-3)}{2}$, onde *n* é o número de lados do polígono.
- A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de *n* lados (S_i) é dada por $(n-2).180°$.
- A soma das medidas dos ângulos externos de um polígono de *n* lados (S_e) é igual a $360°$.
- Em um polígono convexo de *n* lados, o número de triângulos formados por diagonais que saem de cada vértice é dado por *n* − 2.
- A medida do ângulo interno de um polígono regular de *n* lados (a_i) é dada por $\frac{(n-2).180°}{n}$.
- A medida do ângulo externo de um polígono regular de *n* lados (a_e) é dada por $\frac{360°}{n}$.
- A soma das medidas dos ângulos centrais de um polígono regular de *n* lados (S_c) é igual a $360°$.
- A medida do ângulo central de um polígono regular de *n* lados (a_c) é dada por $\frac{360°}{n}$.



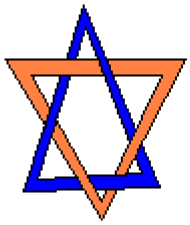
Polígono Estrelado Verdadeiro



Polígono Estrelado Falso



Polígono Entrecruzado



Polígono Entrelaçado

Ângulos de um Polígono Regular

Polígono Regular: É o polígono que possui todos os lados congruentes e todos os ângulos internos congruentes.

Para um polígono de n lados, temos que a soma dos ângulos internos (S_i) = $(n-2) \times 180^o$

Exemplos: Hexágono Regular: 6 lados Cálculo da Soma das medidas dos ângulos internos: S_i = (6-2) . 180° = 4.180° = 720°

Como o Hexágono é regular: A_i = 720º/6 = 120° Ae = 180º - 120º = 60°

O ângulo interno mede 120° e o externo, 60°.

Relações de Euler em poliedros regulares

As relações de Euler são duas importantes relações entre o número *F* de faces, o número *V* de vértices, o número *A* de arestas e o número *m* de ângulos entre as arestas.

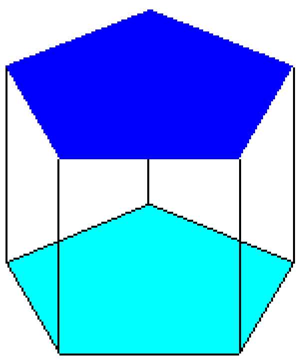
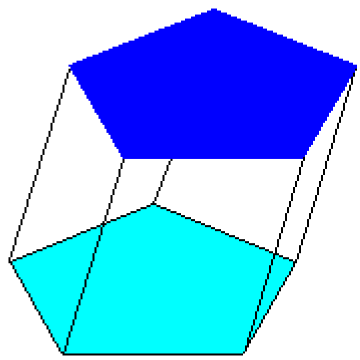
$F + V = A + 2, \quad m = 2A$

estudo dos poliedros está frequentemente ligado ao problema da medição de certas grandezas (volume, área das faces, comprimento das arestas, amplitude dos ângulos diedrais, ...). Mas os poliedros podem ser também interessantes de outro ponto de vista: uma igualdade descoberta por Euler em 1751 relaciona os números V de vértices, F de faces e A de arestas:
V - A + F = 2.

Poliedro regular convexo	Cada face é um	Faces (F)	Vértices (V)	Arestas (A)	V – A + F
Tetraedro	triângulo equilátero	4	4	6	2
Hexaedro	quadrado	6	8	12	2
Octaedro	triângulo equilátero	8	6	12	2
Dodecaedro	pentágono regular	12	20	30	2
Isocaedro	triângulo equilátero	20	12	30	2

Primas.

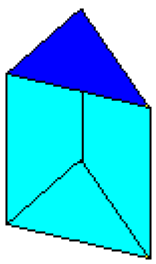
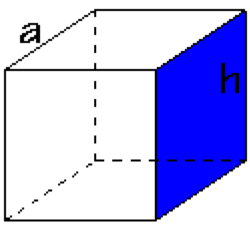
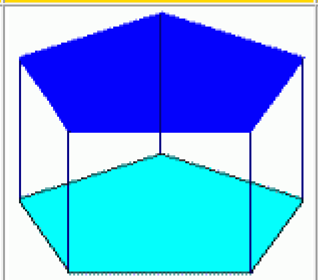
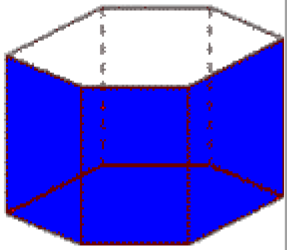
Prisma é um sólido geométrico delimitado por faces planas, no qual as bases se situam em planos paralelos. Quanto à inclinação das arestas laterais, os prismas podem ser retos ou oblíquos.As duas faces são polígonos congruentes situados em planos paralelos e as demais faces são paralelogramos.

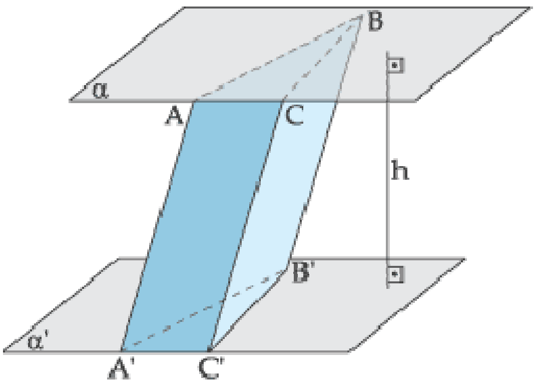
Prisma reto	Aspectos comuns	Prisma oblíquo
	Bases são regiões poligonais congruentes	
	A altura é a distância entre as bases	
	Arestas laterais são paralelas com as mesmas medidas	

	Faces laterais são paralelogramos	

Objeto	Prisma reto	Prisma oblíquo
Arestas laterais	têm a mesma medida	têm a mesma medida
Arestas laterais	são perpendiculares ao plano da base	são oblíquas ao plano da base
Faces laterais	são retangulares	não são retangulares

Quanto à *base*, os prismas mais comuns estão mostrados na tabela:

Prisma triangular	Prisma quadrangular	Prisma pentagonal	Prisma hexagonal
			
Base:Triângulo	Base:Quadrado	Base:Pentágono	Base:Hexágono



Nomenclatura e Classificação

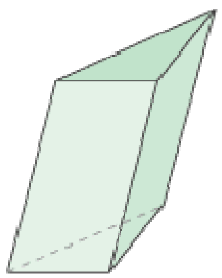
Os prismas recebem nomes de acordo com os polígonos das bases. Assim:

- um prisma é triangular quando suas bases são triângulos;
- um prisma é quadrangular quando suas bases são quadriláteros;
- um prisma é pentagonal quando suas bases são pentagonais;
- um prisma é hexagonal quando suas bases são hexagonais.

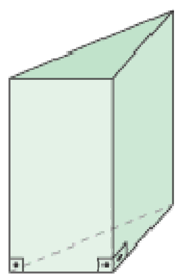
Quando as arestas laterais de um prisma forem perpendiculares aos planos das bases, o prisma é chamado de **reto**; caso contrário, de **oblíquo**.

Os prismas retos cujas bases são **polígonos regulares** são chamados de **prismas regulares**.

Exemplos

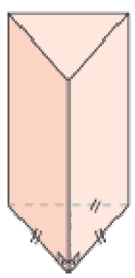


Prisma triangular oblíquo

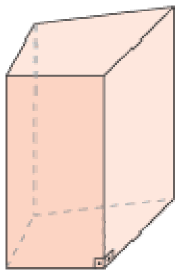


Prisma triangular reto

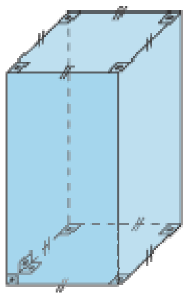
Prismas regulares



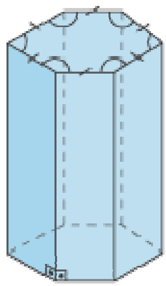
Prisma triangular regular



Prisma quadrangular reto



Prisma quadrangular regular

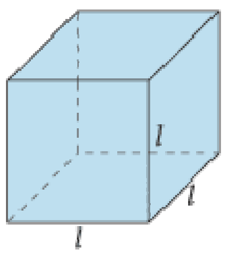


Prisma hexagonal regular

Cubo

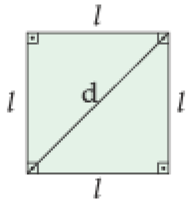
Definição e Elementos

Cubo é um prisma em que todas as faces são quadradas. O cubo é um prisma quadrangular regular cuja altura é igual à medida da aresta da base.



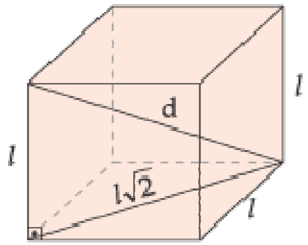
O cubo da figura tem arestas de medida *l*, então:

- as diagonais de suas faces medem $l\sqrt{2}$, pois são diagonais de quadrados de lados com medidas iguais a *l*.



$d = l\sqrt{2}$

• as diagonais do cubo medem $l\sqrt{3}$, pois:



$d^2 = l^2 + (l\sqrt{2})^2 = 3\,l^2$

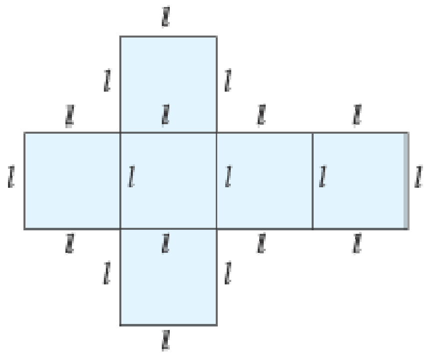
Assim: $\boxed{d = l\sqrt{3}}$

D = l√3

Área Total

A área de um quadrado de lado *l* é l^2, então a área A da superfície de um cubo de aresta *l* é:

$\boxed{A = 6l^2}$



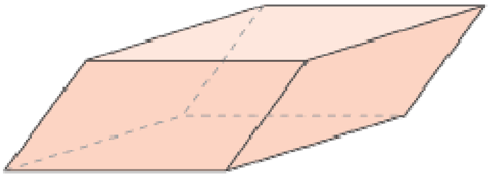
Cubo planificado l[6]

Paralelepípedos

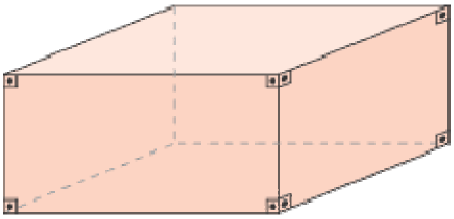
Definição

Chamamos de paralelepípedo o prisma cujas bases são paralelogramos; dessa forma, todas as faces de um paralelepípedo são paralelogramos.

Exemplos

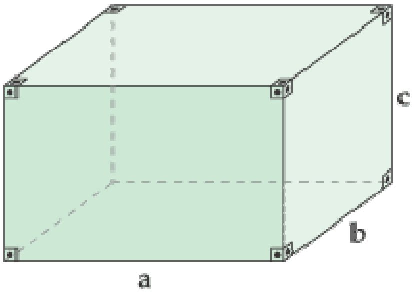


Paralelepípedo oblíquo



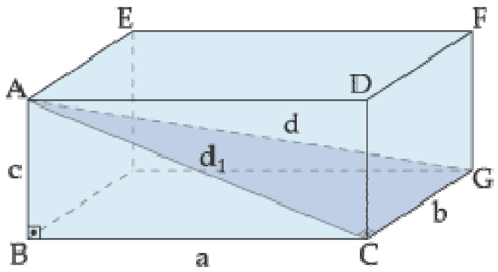
Paralelepípedo reto

Paralelepípedo Reto Retângulo



Diagonais de um paralelepípedo retângulo

No paralelepípedo da figura com dimensões a, b e c, sejam d_1 e d, as diagonais da face ABCD e do paralelepípedo, respectivamente.



No triângulo ABC, temos:$AC^2 = AB^2 + BC^2$ou então,

$$\boxed{d_1^2 = a^2 + c^2}$$

No triângulo ACG, temos: $AG^2 = AC^2 + CG^2$ ou então: $\boxed{d^2 = d_1^2 + b^2}$

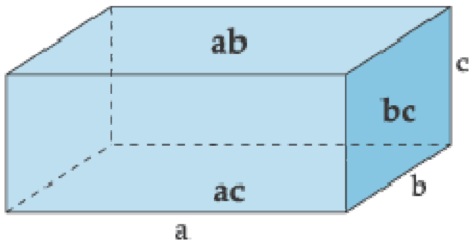
Como $d_1^2 = a^2 + c^2$, temos: $d^2 = a^2 + c^2 + b^2$ ou

$$\boxed{d^2 = a^2 + b^2 + c^2}$$

Área total (A_T) de um paralelepípedo retângulo

Sendo a, b e c as dimensões de um paralelepípedo retângulo, as áreas de cada par de faces opostas são: ab, ac e bc.

Assim: $\boxed{A_T = 2 \cdot (ab + ac + bc)}$



Volume (V) de um paralelepípedo retângulo

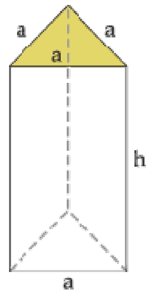
Sendo a, b e c as dimensões do paralelepípedo retângulo, temos: $\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$

Área e Volume de Prismas Regulares

Sabemos que um prisma é chamado de regular quando é reto e tem base regular.
Vamos calcular a área e o volume dos principais prismas regulares:

Prisma Triangular Regular

Consideremos um prisma triangular regular com aresta da base **a** e altura **h**.



Área da base (B)

$$B = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

Área lateral (A_L)

$$A_L = 3 \cdot A_{\text{face lateral}}$$

$$A_L = 3 \cdot (ah) = 3\,ah$$

Área total (A_T)

$$A_T = A_L + 2B$$

$$A_T = 3ah + 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_T = 3ah + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

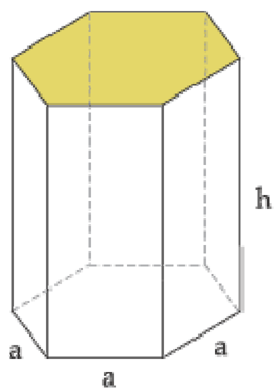
Volume (V)

$$V = B \cdot h$$

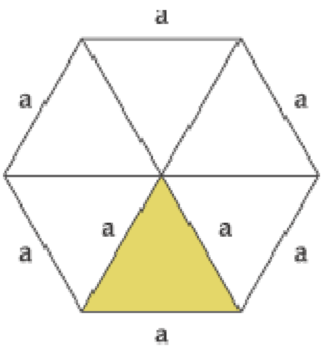
$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$$

Prisma Hexagonal Regular

Consideremos um prisma hexagonal regular com aresta da base **a** e altura **h**.



Área da base (B)



$$B = 6 \cdot \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \right) \qquad B = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

Área lateral (A_L)

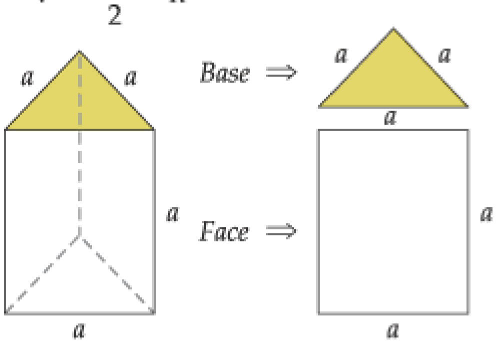
$$A_L = 6 \cdot A_{\text{face lateral}}$$
$$A_L = 6\,(ah) = 6\,ah$$

Área total (A_T)

$$A_T = A_L + 2B$$

Volume (V)

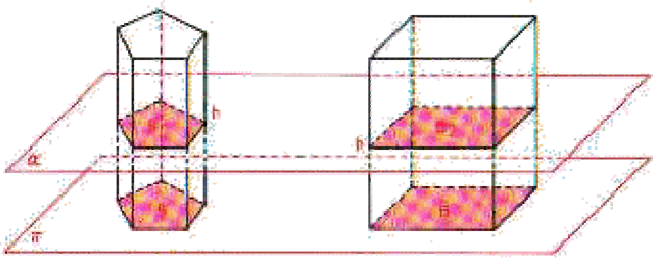
$$V = B \cdot h$$
$$V = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot h$$



$$A_B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$
$$A_f = a^2$$

Principio de Cavalieri.

Quanto ao prisma é basicamente o calculo de seu volume (recto ou oblíquo), que é igual ao volume do paralelepípedo. Consideremos um paralelepípedo e um prisma com a mesma altura, e em que a base do paralelepípedo tem a mesma área que a base do prisma.



As secções feitas nestes dois sólidos por um plano paralelo às bases são polígonos com a mesma área, e portanto, pelo princípio de Cavalieri, estes dois sólidos têm o mesmo volume. Sendo assim, o volume do prisma é dado pela expressão $V = b \times h$.

Bibliografia:

http://educacao.uol.com.br/matematica/poliedro.jhtm

http://www.somatematica.com.br/emedio/espacial/espacial7.php

http://pt.wikipedia.org/wiki/Poliedro

http://www.brasilescola.com/matematica/poligonos.htm

http://pt.wikipedia.org/wiki/Poligonos

http://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/fm_euler.htm

http://pt.wikipedia.org/wiki/Prisma

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm21/prismas.htm

http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/prisma/prisma.htm