

**CENTRO PAULA SOUZA**  
COMPETÊNCIA EM EDUCAÇÃO PÚBLICA PROFISSIONAL

Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza  
GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO

ETE “Cel. Fernando Febeliano da Costa”

# Polígonos Regulares Inscritos na Circunferência e suas Relações Métricas

2º ano do Ensino Médio; Turma: B  
Professora Márcia Capretz  
Disciplina: Matemática

**Trabalho realizado pelos alunos:**

Bianca de Oliveira Soares, nº 04  
Débora Marin, nº 07  
Frederico Ducatti de Góis, nº 10  
Matheus Mendoza, nº 26  
Rodolfo Cichito, nº 29  
Vinicius Meireles Clais, nº 32

**Piracicaba/2010**

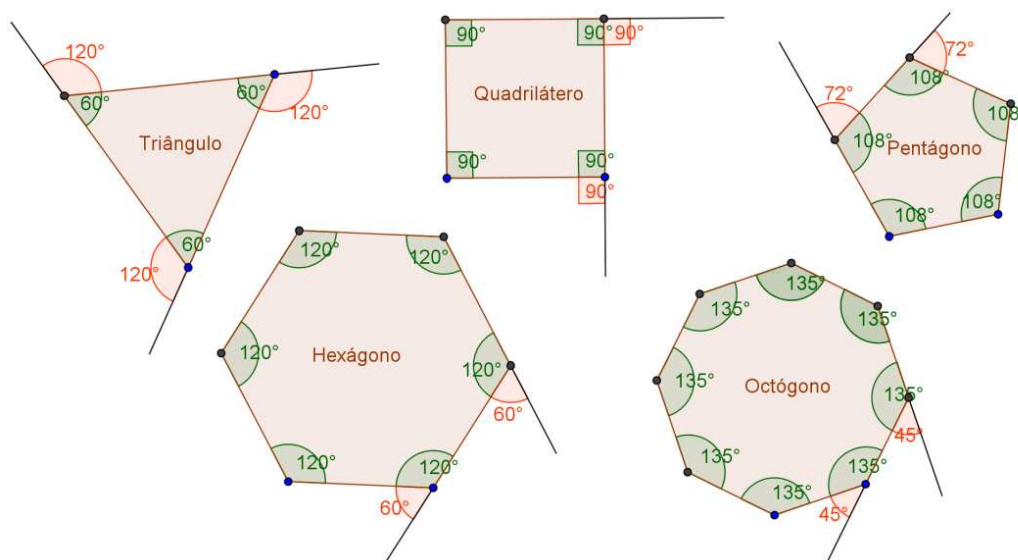
## Índice

- **Polígonos regulares**
- **Polígonos regulares inscritos na circunferência**
  - *Elementos de um polígono regular inscrito*
  - *Propriedades*
  - *Relações métricas de polígonos inscritos na circunferência*
    - Quadrado inscrito na circunferência
    - Hexágono regular inscrito na circunferência
    - Triângulo equilátero inscrito na circunferência
    - Quadro resumo
- **Exercícios**

## Polígonos Regulares

Polígono regular é todo polígono que possui lados e ângulos congruentes entre si, ou seja, todos os seus lados e ângulos são iguais.

O nome de um polígono regular será dado de acordo com seu número de lados.

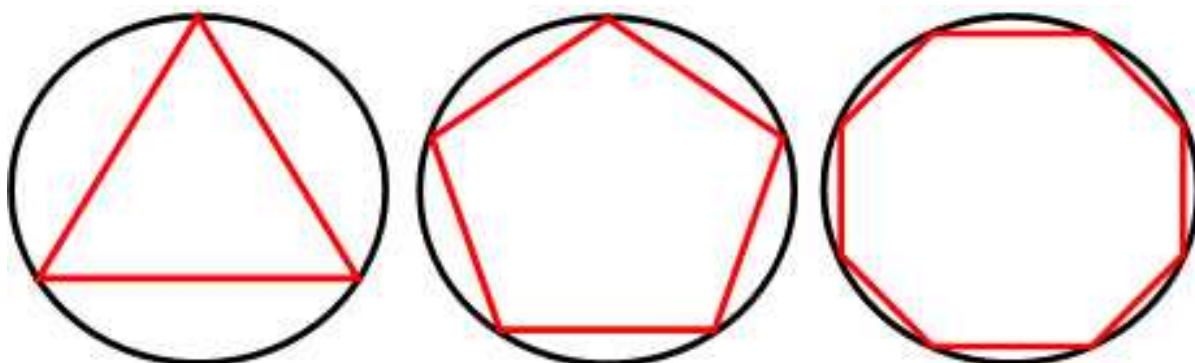


## Polígonos regulares inscritos na circunferência

Todo polígono regular é inscritível numa circunferência, pois dado um polígono regular, existe uma única circunferência que passa pelos seus vértices.

Portanto, quando os vértices de um polígono estão sobre uma circunferência, dizemos que:

- o polígono está inscrito na circunferência; ou
- a circunferência está circunscrita ao polígono.



## Elementos de um polígono regular inscrito

**Centro do polígono** é o centro da circunferência circunscrita a ele (ponto  $O$ ).

**Raio do polígono** é o raio da circunferência circunscrita a ele ( $\overline{OE}$ ).

**Apótema do polígono** é o segmento que une o centro do polígono ao ponto médio de um de seus lados ( $\overline{OM}$ ).

**Ângulo central** é aquele cujo vértice é o centro do polígono e cujos lados são semi-retas que contêm dois raios consecutivos ( $\widehat{EOF}$ ). A medida do ângulo central é dada por:

$$a_c = \frac{360^\circ}{n}$$

( $n$  = número de lados).

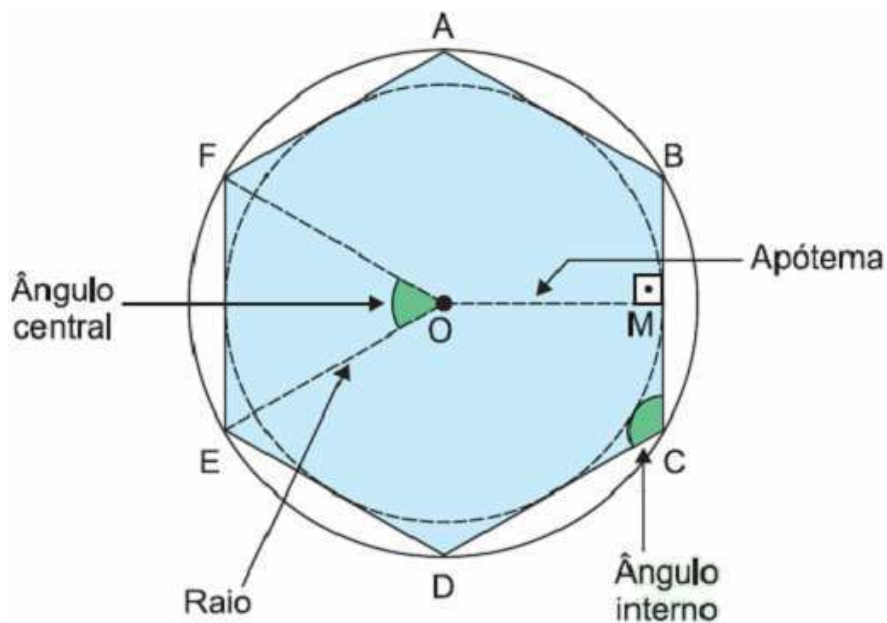
**Ângulo interno** é aquele cujos lados são dois lados consecutivos do polígono ( $\widehat{BCD}$ ). A medida do ângulo interno é dada por:

$$a_i = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$$

( $n$  = número de lados).

A **Soma dos ângulos internos** de um polígono regular de  $n$  lados é dada por:

$$s_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$$



## Propriedades

**1ª** - Em dois polígonos regulares inscritos e com o mesmo número de lados, os perímetros são proporcionais aos comprimentos dos respectivos raios.

**2ª** - Em dois polígonos regulares inscritos e com o mesmo número de lados, os perímetros são proporcionais às medidas dos respectivos lados.

**3ª** - Em dois polígonos regulares inscritos e com o mesmo número de lados, os perímetros são proporcionais às medidas dos respectivos apótemas.

### Exemplos:

**1** - Determinar a medida do ângulo central e a medida do ângulo interno de um pentágono regular inscrito.

\*Indicando por  $a_c$  a medida do ângulo central, temos:

$$a_c = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

\*Indicando por  $a_i$  a medida do ângulo interno, temos:

$$a_i = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} = \frac{(5-2) \cdot 180^\circ}{5} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$$

Logo, o ângulo central do pentágono inscrito é  $72^\circ$  e o ângulo interno é  $108^\circ$ .

**2** - Dois hexágonos regulares estão inscritos em circunferências de raios 14 cm e 21 cm. Se o perímetro do hexágono inscrito na menor delas é 84 cm, determinar o perímetro do outro hexágono.

\*Indicando o perímetro desconhecido por  $x$  e aplicando a 1ª propriedade, temos:

$$\frac{14}{21} = \frac{84}{x}$$
$$14x = 1764$$

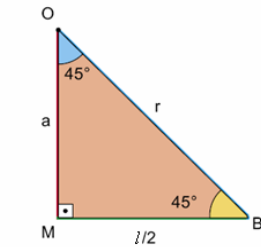
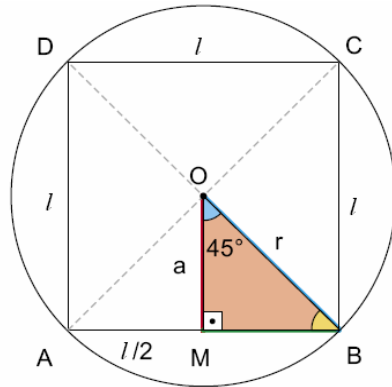
$$x = \frac{1764}{14}$$
$$x = 126$$

Logo, o perímetro do outro hexágono é 126 cm.

## Relações métricas de polígonos inscritos na circunferência

Quando consideramos a medida do lado do polígono regular, a medida do apótema do mesmo polígono e o comprimento do raio da circunferência onde o polígono está inscrito, podemos estabelecer relações métricas entre essas medidas.

### Quadrado inscrito na circunferência



$l$  = medida do lado do quadrado;  
 $r$  = comprimento do raio;  
 $a$  = medida do apótema do quadrado.  
 $a_c = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ , medida do ângulo central.

$$\begin{aligned} \cos 45^\circ &= \frac{l/2}{r} & \sin 45^\circ &= \frac{a}{r} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{l}{2r} & \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{a}{r} \\ 2l &= 2r\sqrt{2} & 2a &= r\sqrt{2} \\ l &= \frac{2r\sqrt{2}}{2} & a &= \frac{r\sqrt{2}}{2} \\ l &= r\sqrt{2} & & \end{aligned}$$

#### Exemplo:

1 - Um quadrado está inscrito numa circunferência de raio 24 cm. Nessas condições, determine:

a) a medida do lado do quadrado:

$$l = r\sqrt{2} = 24\sqrt{2} \text{ cm}$$

b) a medida do apótema do quadrado:

$$a = \frac{r\sqrt{2}}{2} = \frac{24\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2} \text{ cm}$$

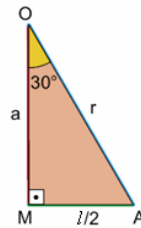
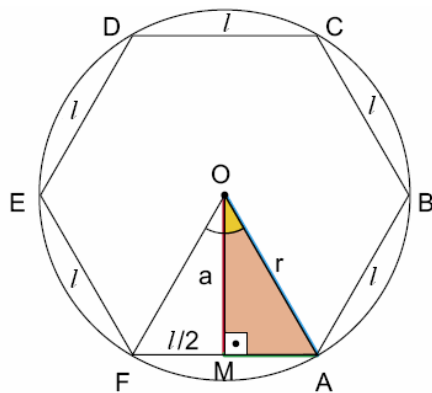
c) o perímetro (P) do quadrado:

$$P = 4l = 4 \cdot 24\sqrt{2} = 96\sqrt{2} \text{ cm}$$

d) a área (S) do quadrado:

$$S = l^2 = (24\sqrt{2})^2 = 1152 \text{ cm}^2$$

## Hexágono regular inscrito na circunferência



$$\text{sen } 30^\circ = \frac{l/2}{r} \quad \text{cos } 30^\circ = \frac{a}{r}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{l/2}{r}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{l}{2r}$$

$$2l = 2r$$

$$l = r$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{r}$$

$$2a = r\sqrt{3}$$

$$a = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

$l$  = medida do lado do hexágono;  
 $r$  = comprimento do raio da circunferência;  
 $a$  = medida do apótema do hexágono;  
 $a_c = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ , medida do ângulo central.

### Exemplo:

1 - Determine a medida do lado e a medida do apótema de um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio 30 cm.

a) a medida do lado do quadrado:

$$l = r = 30 \text{ cm}$$

b) a medida do apótema:

$$a = \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{30\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3} \text{ cm}$$

## Triângulo eqüilátero inscrito na circunferência

$l$  = medida do lado do triângulo;  
 $r$  = comprimento do raio da circunferência;  
 $a$  = medida do apótema.  
 $a_c = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ , medida do ângulo central

$$\sin 60^\circ = \frac{l/2}{r} \qquad \cos 60^\circ = \frac{a}{r}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{l/2}{r} \qquad \frac{1}{2} = \frac{a}{r}$$

$$\frac{l}{2} \cdot 2 = \sqrt{3} r \qquad 2a = r$$

$$l = r\sqrt{3} \qquad a = \frac{r}{2}$$

### Exemplo:

1 - Um triângulo eqüilátero está inscrito numa circunferência de raio 60 3 cm. Determine:

a) a medida do lado do triângulo:

$$l = r\sqrt{3} = 60\sqrt{3} - \sqrt{3} = 180\text{cm}$$

b) a medida do apótema do triângulo:

$$a = \frac{r}{2} = \frac{60\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3}\text{cm}$$

### QUADRO - RESUMO

	Quadrado	Hexágono regular	Triângulo eqüilátero
Lado	$l = r\sqrt{2}$	$l = r$	$l = r\sqrt{3}$
Apótema	$a = \frac{r\sqrt{2}}{2}$	$a = \frac{r\sqrt{3}}{2}$	$a = \frac{r}{2}$

## **Exercícios**

**1** - Determine a medida do ângulo central e a medida do ângulo interno de cada um dos seguintes polígonos regulares inscritos:

- a) triângulo equilátero
  - b) quadrado
  - c) hexágono regular
  - d) octógono regular
- 

**2** - O perímetro de um polígono regular inscrito numa circunferência cujo raio mede  $x$  é 60 cm. Sabe-se que outro polígono regular com o mesmo número de lados está inscrito numa circunferência de raio 25 cm e tem 150 cm de perímetro. Quanto mede o comprimento  $x$  do raio da primeira circunferência?

---

**3** - Uma circunferência tem 40 cm de raio. Nessas condições, determine a medida do lado e do apótema de cada um dos seguintes polígonos regulares inscritos nessa circunferência:

- a) quadrado
  - b) hexágono regular
  - c) triângulo equilátero
- 

**4** - Um quadrado cujo lado mede 16 cm está inscrito numa circunferência. Determine o comprimento  $r$  do raio dessa circunferência.

---

**5** - Sabendo que o apótema de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio  $r$  mede 15 cm, determine:

- a) o comprimento do raio.
  - b) a medida do lado do triângulo, fazendo  $\sqrt{3} = 1,73$ .
- 

**6** - O apótema de um hexágono regular inscrito numa circunferência mede  $15\sqrt{3}$  cm.

- a) Qual é a medida do raio dessa circunferência?
- b) Qual é a medida do apótema de um triângulo equilátero inscrito nessa circunferência?