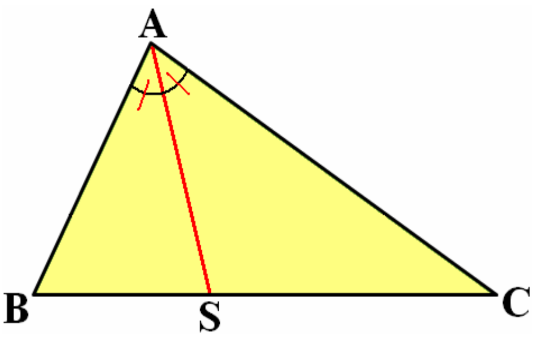
<u>Teorema da Bissetriz Interna</u>

Uma bissetriz é uma semi-reta que divide um ângulo em dois ângulos congruentes, ou seja, divide um ângulo em dois ângulos com a mesma medida.

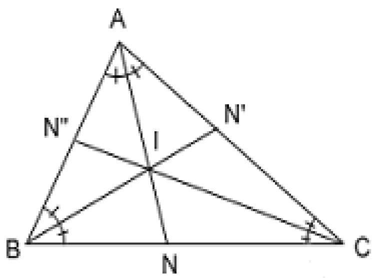
O teorema da bissetriz interna diz que, dado um triângulo ABC, fazendo-se uma bissetriz interna do ângulo A que determina sobre o segmento *BC* um ponto D, tem-se que os segmentos *BD* e *CD* formados por este ponto são diretamente proporcionais aos lados AB e AC,respectivamente.

Em outras palavras, tendo um triângulo ABC, partindo uma bissetriz de A, e sendo D a intersecção entre a bissetriz e o lado BC, tem-se que:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BS}{SC} \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{BS} = \frac{AC}{SC}$$

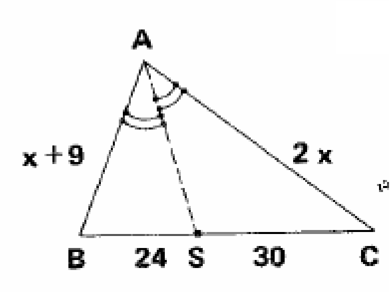


A bissetriz interna de um triângulo corresponde ao segmento de reta que parte de um vértice, e vai até o lado oposto do vértice em que partiu, dividindo o seu ângulo em dois ângulos congruentes. Em um triângulo há três bissetrizes internas:

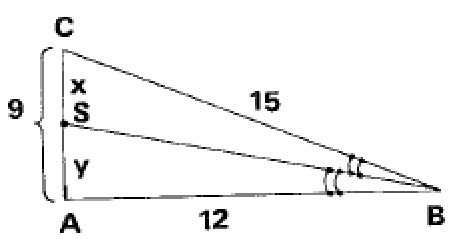


Exercícios

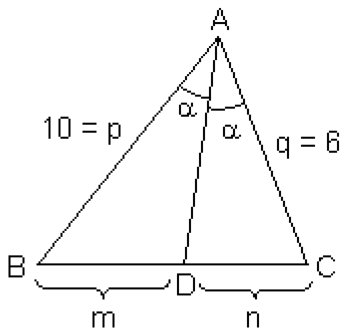
1- Na figura, *AS* é bissetriz interna do ângulo Â. Calcule x.



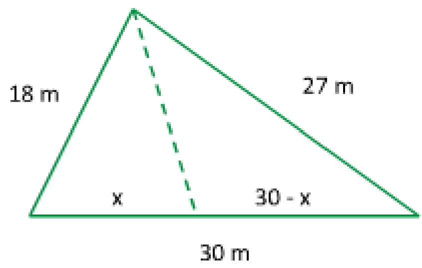
2- Na figura, calcule os valores de x e y respectivamente , sendo *BS* a bissetriz interna do ângulo $\hat{B}$.



3- Ache os valores de m e n, sabendo que m + n = 12.

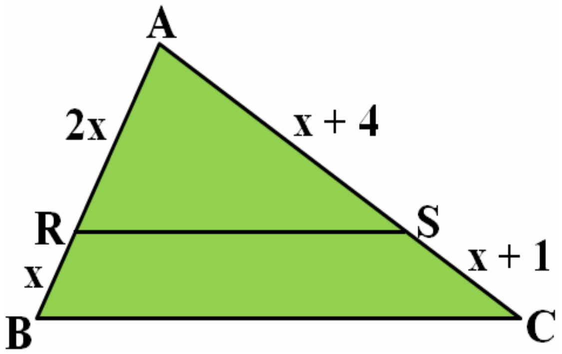


4- Ache o valor de x no triângulo abaixo.

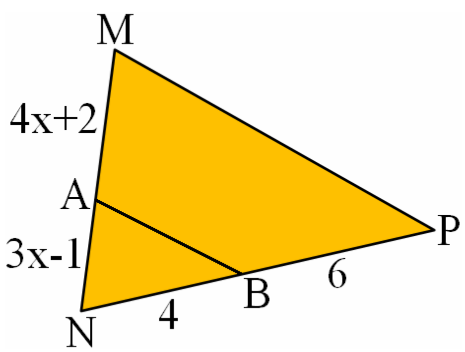


5- Nos triângulos abaixo, determine a medida x indicada.

a)

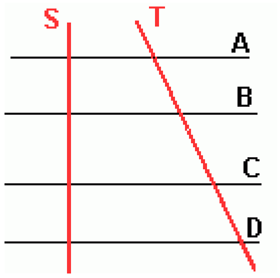


b)



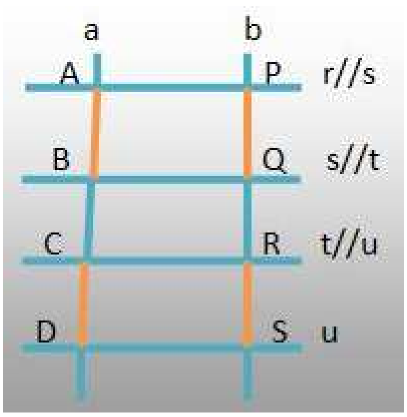
Feixe de Paralelas

Um conjunto de três ou mais retas paralelas num plano é chamado feixe de retas paralelas. A reta que intercepta as retas do feixe é chamada de reta transversal. As retas A, B, C e D que aparecem no desenho abaixo, formam um feixe de retas paralelas enquanto que as retas S e T são retas transversais.



Teorema de Tales

Dados: Um feixe de retas paralelas e retas transversais, a razão entre as medidas dos segmentos quaisquer de uma das transversais é igual à razão entre as medidas dos segmentos correspondentes de outra.



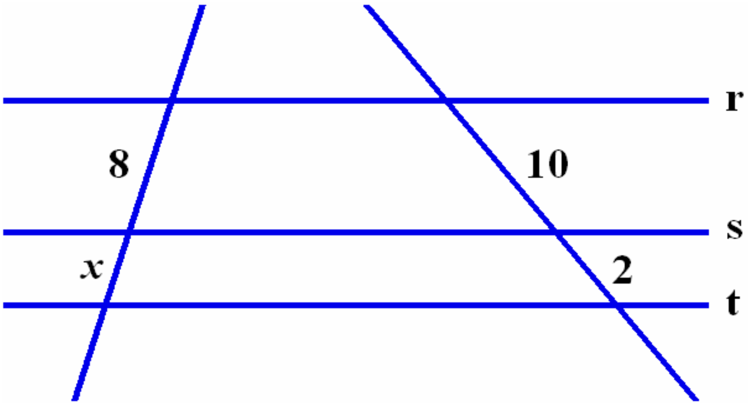
Nesta figura temos:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{PQ}{RS} \text{ ou } \frac{AC}{BD} = \frac{PR}{QS} \text{ ou } \frac{AD}{AB} = \frac{PS}{PQ} \text{ ou ...}$$

Observamos que uma proporção pode ser formulada de várias maneiras. Se um dos segmentos do feixe de paralelas for desconhecido, a sua dimensão pode ser determinada com o uso de razões proporcionais.

Exemplo:

a) Na figura r // s // t, determinar a medida *x* indicada.



Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{10}{2} = \frac{8}{x}$$

$$10x = 2 \cdot 8$$

$$10x = 16$$

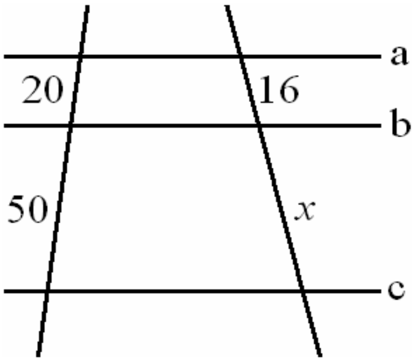
$$x = \frac{16}{10}$$

$$x = 1{,}6$$

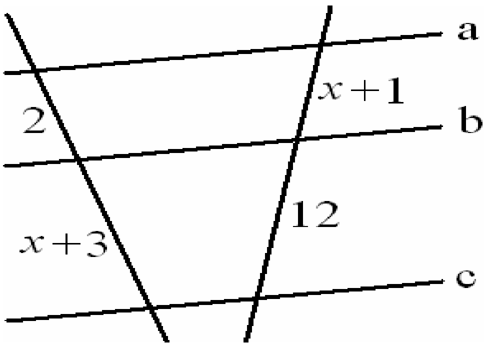
Exercícios

1- Nas figuras, a // b // c, determine os valores de *x*.

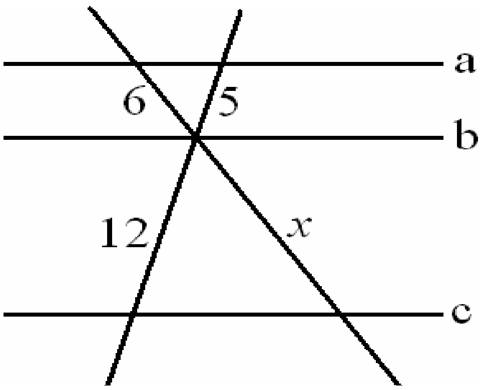
a)



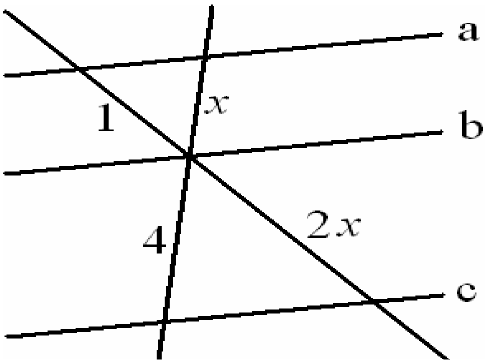
b)



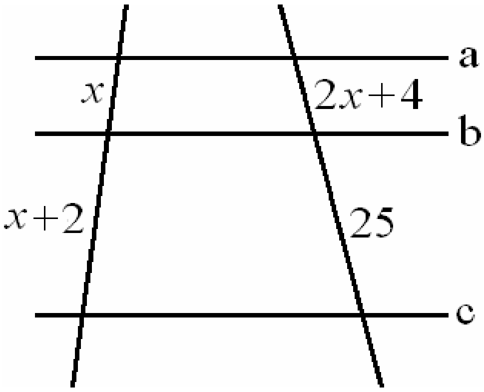
c)



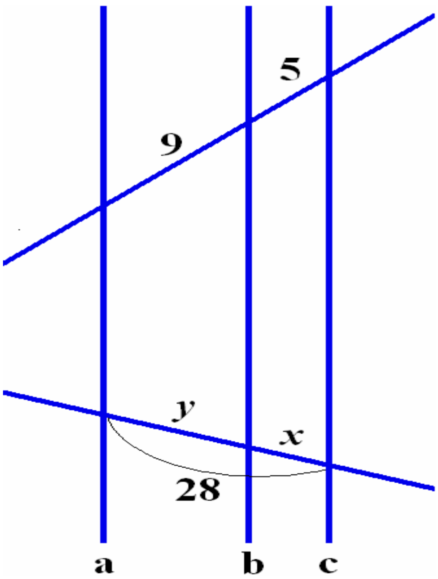
d)



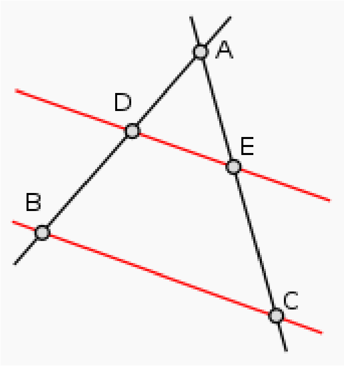
e)



2- Na figura a // b // c, determinar as medidas *x* e *y* indicadas.

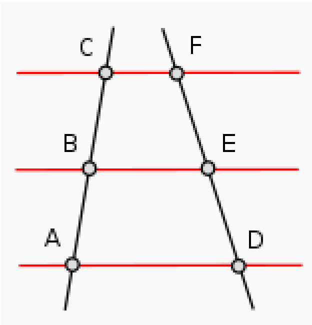


3- Considerando a figura abaixo, usando o Teorema de Tales:



a) Determine AD, sabendo que DB = 5, EC = 10 e AE = 8
b) Determine AD e DB, supondo que AB = 26, AE = 8 e EC = 5
c) Determine AD e DB, supondo que AB = 27, AE = 10 e AC = 18

4- Considerando a figura abaixo, usando o Teorema de Tales:



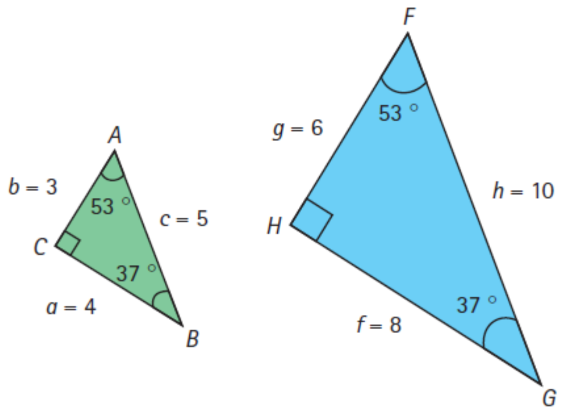
a) Determine AB, supondo que BC = 10 cm, DE = 18 cm e EF = 20 cm
b) Determine AB, supondo que AC = 30 cm, DE = 8 cm e EF = 7 cm
c) Determine AB, supondo que AC = 20 cm, DF = 30 cm e que EF é 4 cm maior que BC
d) Determine AC, supondo que DE = 12 cm, EF = 8 cm e que AB é 3 cm maior que BC

Semelhança de Triângulos

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três **ângulos** ordenadamente **congruentes** e os **lados** correspondentes **proporcionais**.

ATENÇÃO: Nunca confundir **congruência** com **semelhança. Congruência** é quando os triângulos são iguais em tamanho e ângulos, ou seja, idênticos. **Semelhança** é quando eles têm o mesmo formato, mas tamanhos diferentes, ou seja, são proporcionais.

Na figura, o triângulo [ABC] é semelhante ao triângulo [FGH].



Ângulos correspondentes geometricamente iguais

$\hat{A} = \hat{F} = 53°$

$\hat{B} = \hat{G} = 37°$

$\hat{C} = \hat{H} = 90°$

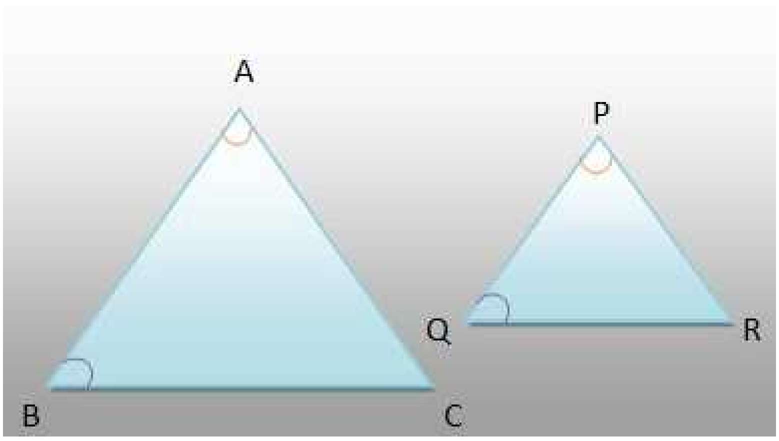
Lados correspondentes proporcionais

$$\frac{f}{a} = \frac{g}{b} = \frac{h}{c} = r$$

$$\frac{8}{4} = \frac{6}{3} = \frac{10}{5} = 2$$

1º Critério (AA~)

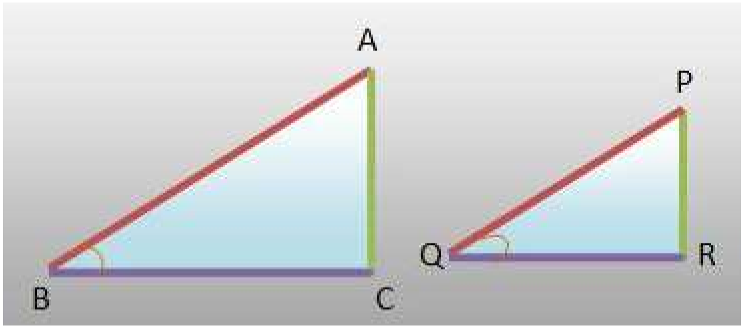
"Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes."



$$\left.\begin{array}{l} \hat{A} \cong \hat{P} \\ \hat{B} \cong \hat{Q} \end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta PQR$$

2º Critério (LAL~)

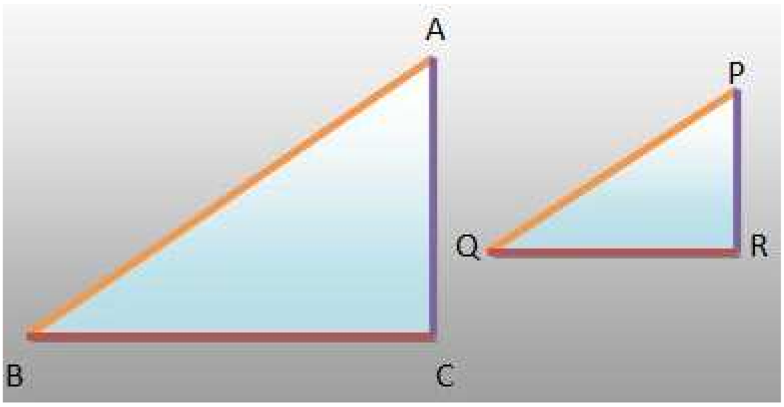
"Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos lados homólogos do outro triângulo e se o ângulo entre estes lados for congruente ao correspondente do outro triângulo, então os triângulos são semelhantes."



$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} \cong \hat{Q} \\ \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} \end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta PQR$$

3º Critério (LLL~)

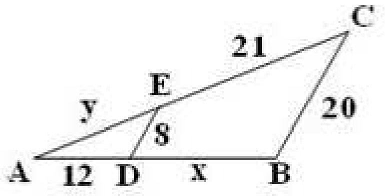
"Se dois triângulos possuem os seus lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes."



$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} \Longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta PQR$$

Exemplo:

Calcule *x* e *y* no triângulo ABC.



$\overline{BC} // \overline{DE}$

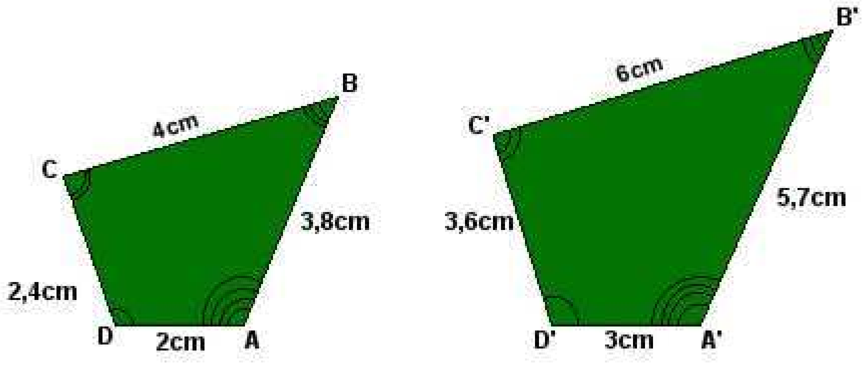
$$\frac{y}{8} = \frac{y+21}{20} \Rightarrow 2y + 42 = 5y \Rightarrow y = 14$$

$$\text{e} \ \frac{14}{12} = \frac{35}{12+x} \Rightarrow 84 + 7x = 210 \Rightarrow x = 18$$

Critérios de Semelhança de Polígonos

- Dois polígonos são semelhantes quando têm ângulos correspondentes geometricamente iguais e lados correspondentes proporcionais;
- Os polígonos semelhantes têm a mesma forma, mas não necessariamente as mesmas dimensões;
- Para designar a semelhança entre dois polígonos usa-se o símbolo ~;
- A razão de semelhança é a razão entre o comprimento de um segmento qualquer da figura transformada e o comprimento correspondente da figura original e representa-se pela letra *r*.

Considere os polígonos ABCD e A'B'C'D', nas figuras:



Os ângulos correspondentes são congruentes:

$$\hat{A} \cong \hat{A}', \ \hat{B} \cong \hat{B}', \ \hat{C} \cong \hat{C}', \ \hat{D} \cong \hat{D}'$$

Os lados correspondentes (ou homólogos) são proporcionais:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'} \quad \text{ou} \quad \frac{3,8}{5,7} = \frac{4}{6} = \frac{2,4}{3,6} = \frac{2}{3}$$

Podemos concluir que os polígonos ABCD e A'B'C'D' são semelhantes e indicamos:

ABCD ~ A'B'D'C' (lê-se "polígonos ABCD é semelhante ao polígono A'B'D'C' ")

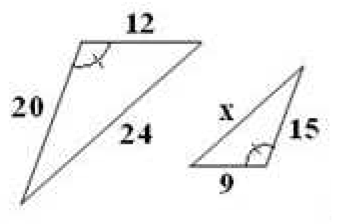
<u>Exercícios</u>

1- Calcular a altura da torre de uma igreja que projeta uma sombra de 18 metros de comprimento se, no mesmo instante, uma vara de 1,5 metros produz uma sombra de 2,5 metros.

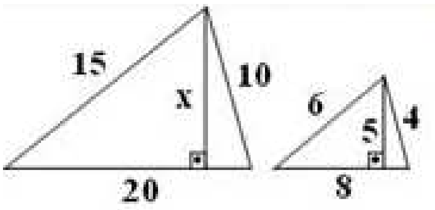
2- Se uma haste de um metro projeta uma sombra de 1,5 metros, qual será o comprimento de uma árvore com uma sombra de 4,5 metros no mesmo instante?

3- Em certo momento, a sombra projetada por uma torre tem 24 metros e a sombra projetada por uma pessoa tem 80 centímetros. Qual é a altura da torre se a pessoa tem 1,85 metros?

4- Dados os triângulos a seguir, calcule *x*.



5- Determine a medida da altura *x* sabendo que os triângulos são semelhantes.



RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

Teorema da Bissetriz Interna

1- 15
2- 5 e 4
3- $n = 9/2$
   $m = 15/2$
4- $x = 12$
5- a) $x = 2$ b) $x = 7$

Teorema de Tales

1-
a) $x = 40$

b) $x = 3$
c) $x = 14,4$
d) $x = 2$
e) $x = 0,5$

2- $x = 10$
   $y = 18$

3-
a) $AD = 4$

b) $AD = 16$ e $DB = 18$
c) $AD = 15$ e $DB = 12$

4-
a) $AB = 9$
b) $AB = 16$
c) $AB = 12$ cm
d) $AB = 6$ cm

Semelhança de Triângulos

1- 10,8 metros
2- 3 metros
3- 55,5 metros
4- $x = 18$
5- $x = 25/2$